Bekleme Hattı Teorisi

Sürekli Parametreli Markov Zincirleri

Tanım 1. $\{ X_t, \ t \geq 0 \}$ **,** durum uzayı $E = \{0,1, \dots\}$olan sürekli parametreli bir süreç olsun. Aşağıdaki özellik geçerli olduğunda bu sürece sürekli parametreli Markov zinciri denir. Her bir

ve $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq t$ ve $n_1, \dots, n_k \in E$ için

$$P\left(X_t = j / X_{t_1} = n_1, \dots, X_{t_k} = n_k\right) = P\left(X_t = j / X_{t_k} = n_k\right) \tag{1}$$

$t > t'$ için

$$P(X_t = j / X_u, u \leq t') = P(X_t = j / X_{t'}) \tag{2}$$

Yukarıdaki her iki eşitliği de Markov özelliği denir. Bu tanıma göre Markov sürecinin herhangi bir t anında durumu belli olduğunda bunun geçmiş ve geleceği birbirinden bağımsızdır.

$p_{ij}(t) = P(X_{t+t'} = j / X_{t'} = i)$ ifadesinin anlamı t' anında i durumunda olan sürecin $t + t'$ anında j - durumunda olması olasılığıdır. Özel olarak $t' = 0$ alındığında

$$p_{ij}(t) = P(X_{t'} = j / X_0 = i) \tag{3}$$

$\{ X_t, \ t \geq 0 \}$ süreci homojen süreç olarak adlandırılır. (3) olasılığına i durumundan j durumuna geçiş olasılığı denir. Bunlar aşağıdaki özellikleri sağlar.

$\forall \, i, j \in E$ için

$$p_j(t) = P(X_t = j), \quad p_j(t) \geq 0, \quad p_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = 1$$

Kabul edelim ki ,

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{4}$$

Varsayalım ki ,

$$a_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}$$

türevleri mevcuttur. a_{ii} 'ye i durumunda kalma oranı , $a_{ij}(i \neq j)$' ye ise i durumundan j durumuna geçiş oranı denir ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

1) $i \neq j$ için $\quad a_{ij} \geq 0$
2) $i = j$ için $\quad a_{ii} \leq 0$
3) $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = 0$

Kolmogorov Denklemleri

$t' \geq 0$ ve $t \geq 0$ birbirini izleyen iki zaman aralığı olsun. Ayrıca $\forall\, i, k, j \in E$ olsun

$$p_{ij}(t + t') = \sum_{k \in E} p_{ik}(t) p_{kj}(t') \tag{5}$$

Bu denklemin t' - e göre türevi alınıp t'=0 yazılırsa,

$$p_{ij}'(t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t) p'_{kj}(0) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t) a_{kj} \tag{6}$$

Benzer olarak (5) denkleminin t ye e göre türevi alınıp t=0 yazılırsa,

$$p'_{ij}(t') = \sum_{k \in E} a_{ik} p_{kj}(t') \tag{7}$$

elde edilir. (6) ve (7) denklemlerine sırasıyla Kolmogorov'un *ileriye* ve *geriye doğru diferansiyel denklemleri* denilir. (6) denkleminde başlangıç durumu dikkate alınmadığında

$$p_j'(t) = \sum_{k \in E} p_k(t) a_{kj}\,, \tag{8}$$

elde edilir.

Limit Dağılımı.

Sürekli parametreli Markov zinciri indirgenemez ise $t \rightarrow \infty$ için geçiş olasılıkları sabit bir değere yaklaşır. Bu sabit olasılık başlangıç durumuna bağlı değildir. $\forall_i$ için

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = p_j$$

Bu limit durumuna denge durumu (steady-state) denir. Elemanları

p_j , $j = 0, 1, 2, \ldots$ olan vektörü *P* ile gösterelim. Buna göre

P= $[p_0, p_1, \ldots]$ olur. *P* ye limit dağılımı ya da limit olasılık dağılımı denir. (3) ifadesinin her iki yanının t ye göre limitini alıp

$$\lim_{t\to\infty} p'_{ij}(t) = \sum_k \lim_{t\to\infty} p_{ik}(t) a_{kj} \quad ,$$

$$\sum_k p_k a_{kj} = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik kuyruk modellerinin kurulmasında temel bir ifadedir.

Doğum-Ölüm Süreci

Tanım : Farz edelim $\{ X_t, \ t \geq 0 \}$ sürekli parametreli ve kesikli durum uzaylı homojen Markov sürecidir. Bu sürecin geçiş olasılıkları olan p_{ij} aşağıdaki koşulu sağlar. $h \rightarrow 0$ için

$$P_i(X_h = j) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h) & ; j = i+1 \\ \mu_i h + o(h) & ; \ j = i-1 \\ 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) & ; \ j = i \\ o(h) & ; \quad j = i \pm 2, i \pm 3, \ldots \end{cases}$$

Bu durumda bu sürece doğum-ölüm süreci denir. λ_i' ye doğum , μ_i 'ye ölüm parametresi denir. Farz edelim

$$\lim_{t \to \infty} p_k(t) = p_k$$

Burada $p_k(t) = P(X_t = k)$ ve bu sürecin durum uzayı $E = \{0,1, \ldots\}$ ve $k = 0,1,2, \ldots$ değerlerini almaktadır. Bu süreçle ilgili olarak aşağıdaki iki problem ortaya çıkabilir.

a. $p_k(t)$ için diferansiyel denklemin bulunması

b. p_k olasılıklarının hesaplanması.

Burada $p_k(t)$ ve p_k 'nın bulunması için geçiş oranlarının hesaplanması gerekir.

Tanıma göre,

$$a_{i,i+1} = p'_{i,i+1}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{p_{i,i+1}(h) - p_{i,i+1}(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{p_{i,i+1}(h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\lambda_i h + o(h)}{h}$$

$$= \lambda_i$$

$$a_{i,i-1} = p'_{i,i-1}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{p_{i,i-1}(h) - p_{i,i-1}(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{p_{i,i-1}(h)}{h}$$

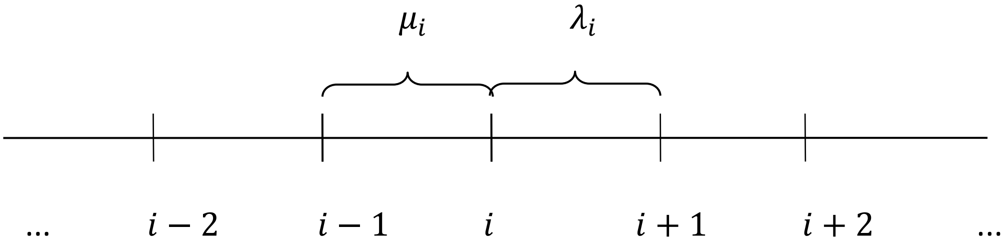
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\mu_i h + o(h)}{h}$$

$$= \mu_i$$

İndislerin farklı olduğu durumlar bulundu. Şimdi de aynı olduğu durumları incelendiğinde.

$$\textstyle\sum_j p_{ij}(t) = 1\,, \qquad\qquad \sum_j p'_{ij}(t) = 0\,,$$

$[0,\ t]$ aralığında sürekli ve türevlenebilir olduğundan 0 noktasında da sürekli ve türevlenebilir olacağından $\sum_j p'_{ij}(0) = \sum_j a_{ij} = 0$



$$\textstyle\sum_j a_{ij} = a_{i0} + a_{i1} + \cdots + a_{i,i-2} + a_{i,i-1} + a_{i,i} + a_{i,i+1} + a_{i,i+2} + \ \ldots \ = 0$$

$a_{i,i-1} + \ a_{i,i} + a_{i,i+1} = \ \mu_i + \ a_{i,i} + \ \lambda_i = 0 \Rightarrow a_{i,i} = -(\ \lambda_i + \ \mu_i)$

Buna göre :

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & ; \quad j = i+1 \\ \mu_i & ; \quad j = i-1 \\ -(\ \lambda_i + \ \mu_i) & ; \quad j = i \\ \quad 0 & ; \quad j = i \pm 2, i \pm 3, \ldots \end{cases}$$

tanımda başlangıçta ölüm olmadığından $\mu_0 = 0$ dır. a_{ij}' ler yardımıyla

$$p_j{}'(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) a_{ij}$$

denklemi açıldığında,

$$p_j'(t) = p_0(t)a_{0j} + \cdots + p_{j-2}(t)a_{j-2,j} + p_{j-1}(t)a_{j-1,j} + p_j(t)a_{j,j} + p_{j+1}(t)a_{j+1,j} + p_{j+2}(t)a_{j+2,j} + \cdots$$

$$p_j'(t) = p_{j-1}(t)a_{j-1,j} + p_{j-1}(t)a_{j-1,j} + p_j(t)a_{j,j} + p_{j+1}(t)a_{j+1,j}$$

Yukarıdaki denklem sistemi j'ye göre fark t'ye göre diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemin her iki tarafı için denge durumu uygulanırsa ,

$$\lim_{t\to\infty} p_j'(t) = \lim_{t\to\infty} [p_{j-1}(t)a_{j-1,j} + p_j(t)a_{j,j} + p_{j+1}(t)a_{j+1,j}]$$

$$= p_{j-1}a_{j-1,j} + p_j a_{j,j} + p_{j+1}a_{j+1,j}$$

Sol taraf için denge durumuna göre $p_k(t) \to p_k$ iken

$$p'_k(t) \to p_k' = 0$$

olur. Buradan

$$0 = p_{j-1}a_{j-1,j} + p_j a_{j,j} + p_{j+1}a_{j+1,j}$$

$$0 = p_{j-1}\lambda_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)p_j + +\mu_{j+1}p_{j+1}$$

$$j = 0$$

elde edilir. $j = 0$ alındığında,

$$0 = -(\lambda_0 + \mu_0)p_0 + +\mu_1 p_1$$

$$0 = -\lambda_0 p_0 + +\mu_1 p_1$$

Bu fark denklem sistemi çözüldüğünde

$$-\lambda_j p_j - \mu_j p_j + \lambda_{j-1} p_{j-1} + -\mu_{j+1} p_{j+1} = 0$$

$$\mu_{j+1} p_{j+1} - \lambda_j p_j = \mu_j p_j + \lambda_{j-1} p_{j-1}$$

$$p_{j+1} = \frac{\lambda_j p_j}{\mu_{j+1}} \quad (j = 0,1, \dots)$$

$$p_j = \frac{\lambda_{j-1} p_{j-1}}{\mu_j}$$

$$\vdots$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0 p_0}{\mu_1}$$

olur. O halde ;

$$p_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \frac{\lambda_{j-2}}{\mu_{j-1}} \dots \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

$$p_j = \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} p_0$$

$$\prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \theta_j$$

$$p_j = \theta_j p_0$$

elde edilir yukarıdaki denklemde her iki taraf j üzerinden toplanırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j p_0$$

$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ olduğundan

$$p_0 = 1/\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j$$

Bu eşitlik yukarıdaki p_j de yerine yazılırsa

$$p_j = \theta_j/\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j$$

olur. Burada iki durum söz konusudur.

1- $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j < \infty$ ise seri yakınsaktır. Bu durumda p_j'ler bulunur (durağan dağılım vardır).

2- $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j = \infty$ ise seri ıraksak ve $p_j = 1/\infty$ = 0

$$p_j = \theta_j p_0 = \theta_j/\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j = \theta_j 0 = 0$$

bu durumda durağan dağılım yoktur. Durağan dağılım olabilmesi için,

$$p_j \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$$

olması gerekir.

KUYRUK SİSTEMLERİ

Kuyruk Sistemlerinin Genel Yapısı

Kuyruk sistemleri tek kanallı, paralel çok kanallı, fazlı, tandem(ardışık), paralel ve ardışık gibi olabilirler. Bir kuyruk sistemi aşağıdaki simgeyle ifade edilir

Kendal – Taha – Lee Simgesi

D. Kendal(1953) çok kanallı kuyruklarda geliş dağılımı, servis süresi (ayrılış) dağılım ve sistemde bulunan paralel kanal(servis) sayısını tanımlamak üzere bir notasyon önermiştir. Daha sonra A. Lee(1966) servis disiplini ve sistemde bulunan maksimum müşteri sayısını eklemiştir. H. A. Taha(1968) altıncı bir karakteristik olan geliş kaynağını simgelemeye katmıştır. Bu simgeleme genel olarak şöyledir:

(*a* / *b* / c) : (*d* / *e* / *f*)

a : Gelişler arası sürenin dağılım fonksiyonunu(giriş akımını) gösterir.

b: Hizmet süresinin dağılım fonksiyonunu gösterir.

c : Kanal sayısı.

d : Hizmet disiplini.

e : Sistemde (servis ve kuyrukta) izin verilen en çok müşteri sayısı.

f : Geliş kaynağı büyüklüğü.

Bu simgelerin geniş açıklaması aşağıdaki gibidir. Paralel c kanallı bir kuyruk sisteminde müşterilerin sisteme (süpermarket, petrol istasyonu, hastane, banka v.b.) geliş anları $t_1, t_2, \ldots, t_n$ olsun. t_n $n.$ müşterinin sisteme geliş anı olmak üzere $u_n = t_n - t_{n-1}$'ler ardışık iki müşteri arasındaki süreyi göstersin. t_n'ler tesadüfi değişken olduğundan u_n'ler de tesadüfi değişkenlerdir. $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dizisine müşteri akımı (sisteme giriş akımı) denir. $u_1, u_2, \ldots, u_n$'lerin bağimsız ve aynı dağılıma sahip olduğu varsayılır. $u_1, u_2, \ldots, u_n$' lerin dağılım fonksiyonunu $P(u_i < t) = A(t)$ ile gösterelim. $A(t)$ keyfi ya da belli bir olasılık fonksiyonu olabilir . $A(t)$ keyfi olduğunda giriş akımına recurent akım ya da genel giriş akımı denir ve GI ile gösterilir.

En çok kullanılan giriş akımları:

1) Eğer $A(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

ise buna Poisson akımı denir. Bu akım M ile ifade edilir.

2) $u_i = D$,her bir u_i sabittir.

Bu tür akıma Deterministik Giriş Akımı denir ve bu akım D ile gösterilir.

3) $u_i = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_k$

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$' lar bağımsızdır ve aynı üstel dağılıma sahiptir.

$$P(\eta_r \prec t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Bu tür dağılıma Erlang Akımı denir ve bu giriş akımı E_k ile gösterilir. $A(t)$'nin verilmesiyle giriş akımı belirlenir.

Hizmet süresi sisteme gelen her bir müşteri belli bir zaman içinde hizmet alıyorsa bu zamana hizmet süresi denir. Sistemin tam belli olabilmesi için hizmet süresinin verilmesi gerekir. Bu süre genellikle bir tesadüfi değişkendir.

ξ_i, i'nci müşterinin hizmet süresini göstermek üzere , $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$'ler bağımsız tesadüfi değişkenler olup aynı dağılıma sahiptirler. Hizmet süresinin dağılım fonksiyonu $P(\xi_i < t) = B(t)$ ile gösterilsin $B(t)$ keyfi olduğunda hizmet süresi G ile gösterilir.

1) ξ_i'ler üstel dağılıma uyarsa $B(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t} & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$

2) ξ_i'ler sabitse $\xi_i = D$

3) ξ_i'ler Erlang dağılımına uyarsa $\xi_i = E_k$ olur.

Hizmet Disiplini. Sisteme gelen müşteri belli bir kurala göre hizmet alacaktır. Bu kurala hizmet disiplini denir. Çeşitli hizmet disiplinleri kullanılmaktadır (Taha, H.,A.,2000)

a) FIFO (İlk gelen ilk hizmeti alır)
b) LIFO (Son gelen hizmeti alır)
c) RANDOM (Tesadüfi olarak)
d) PRIORITY (Öncelikli)

c tane paralel kanaldan birkaçı boş olabilir ve müşteri bir tanesinde hizmet almaya başlar ; yani kanallardan birinde yer alır. Eğer kanalların hepsi dolu ise bekleme hattı vardır.(Bekleme hattı sonluda olabilir sonsuzda olabilir). Bu müşteri , bekleme hattının sonunda yer alır. FIFO 'da bekleme hattının en önünde yer alan ilk hizmeti alır ; LIFO 'da bekleme hattının Sonunda yer alan ilk hizmeti alır ; RANDOM 'da ise tesadüfi olarak hizmet alır. PRIORITY de ise müşteri öncelikli olarak hizmet alır(diğer müşterilere göre hizmet almada önceliklidir).Bekleme hattında ki müşteri sonlu da olabilir sonsuz da olabilir. Gelen müşteri sistemde N'den fazla müşteriyle karşılaşırsa hizmet almadan sistemi terk eder.

Sistemin Göstergeleri

$N(t),\ t \geq 0$; t süresinde sisteme giren müşteri sayısı

$N_q(t),\ t \geq 0$; t süresinde kuyruktaki müşteri sayısı

W, müşterinin sistemde kalma süresi

W_q, müşterinin kuyrukta bekleme süresi,

$E(N)$, sistemdeki ortalama müşteri sayısı

$E(W)$, müşterinin sistemde ortalama bekleme süresi

$E(W_q)$, müşterinin kuyrukta ortalama bekleme süresi

Sistemin verileri yardımıyla göstergelerin hesabı kuyruk teorisinin temel problemidir. İkinci problem ise optimizasyon problemidir.

$M/M/1$ Sistemi ve Analizi

Sistemin Tanımı.

Bu sistem üç elemanın verilmesiyle tanımlanır.

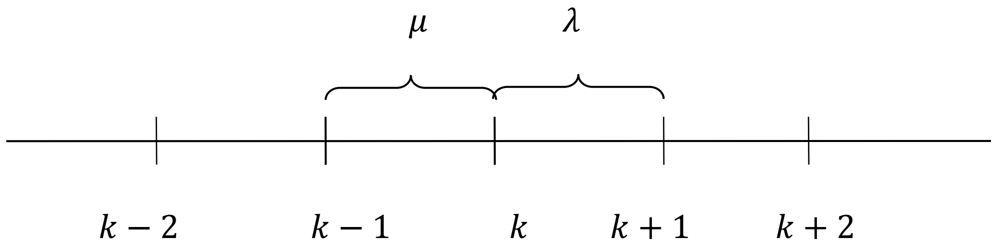
- Müşterilerin sisteme geliş anları (varış) anları, bu anlar $t_1,\ t_2, \ldots$ tesadüfi değişkenlerdir.

- Her bir müşterinin hizmet süresi γ tesadüfi değişkenidir ve bu değişken μ parametreli üstel dağılıma sahiptir.

- Hizmet sitemi bir tane hizmet verenden(kanaldan) oluşmuştur. Sistemin hizmet disiplini FIFO dur. $X(t)$, t anında sistemde olan müşteri sayısı olsun. O halde $\{X(t),\ t > 0\}$ ve durum uzayı $E = \{0,\ 1,\ 2, \ldots\}$ olan bir stokastik süreç olacaktır. Bu süreç $P_k(t) = P(X(t) = k)$ sistemde t anında k tane müşteri olması olasılığıdır. $P_k(t)$ olasılığını bulmak oldukça zordur. Fakat bu olasılık $t \to \infty$ için $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ koşulu altında mevcuttur.

Sisteme ait Denklemlerin Elde Edilmesi

Önce $P_k(t)$ olasılığı için diferansiyel denklem kuralım. Bunun için sistemin t ve $t+h$ anlarındaki durumlarını karşılaştıralım.



$h \to 0$ için belli bir durumda iki ve daha fazla müşteri sayısıyla farklanarak başka bir duruma geçiş olasılığı $o(h)$ dır.

$$p_{ik}(h) = o(h)\,, \qquad |i-k| \geq 2$$

$p_k(t+h)$, $t+h$ anında sistemde k tane müşteri olması olasılığı.

$\{N(t), t \geq 0\}$ t süresinde sisteme giren müşteri sayısını gösteriyor ve bu süreç Poisson sürecidir.

$\{M(t), t \geq 0\}$ t süresinde sistemden ayrılan müşteri sayısını gösteriyor ve bu süreç de Poisson sürecidir.

$$\begin{aligned} p_k(t+h) &= p_k(t)P(N(t)=0)P(M(t)=0) \\ &+ p_{k-1}(t)P(N(t)=1)P(M(t)=0) \\ &+ p_{k+1}(t)P(N(t)=0)P(M(t)=1) \\ &+ \textstyle\sum_{i=2}^{\infty} p_{k-i}(t)P(N(t)=i)P(M(t)=0) \\ &+ \textstyle\sum_{i=2}^{\infty} p_{k+i}(t)P(N(t)=0)P(M(t)=i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_k(t+h) &= p_k(t)\big(1-\lambda h+o(h)\big)\big(1-\mu h+o(h)\big) \\ &+ p_{k-1}(t)\Big(\lambda h+\ o(h)\big(1-\mu h+o(h)\big)\Big) \\ &+ p_{k+1}(t)(1-\lambda h+o(h)\big(\mu h+o(h)\big)+o(h) \end{aligned}$$

$h \to 0$ için

$$p'_k(t) = -(\lambda+\mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

Bu denklem $k = 0$ için,

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

olur. Limit dağılımının olduğunu varsayarsak, denklem sistemine yukarıdaki varsayımlar uygulanırsa,

$$0 = -(\lambda + \mu)p_k + \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}$$

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

elde edilir. Bu denklem sistemi $\rho = (\lambda/\,\mu) < 1$ koşulu altında çözülürse,

$$p_{k+1} = \rho^{k+1} p_0\,, \qquad k = 0, 1, \ldots \text{ için}$$

elde edilir. Bu eşitliğinin her iki tarafı toplandığında $p_0 = 1 - \rho$ bulunur.Yani sistemde hiç müşteri olmaması olasılığı p_0 elde edilir. Ayrıca sistemde herhangi bir anda n- tane müşteri olması olasılığı

$$P(N = n) = p_n = \rho^n p_0\,. \tag{23}$$

Performans Ölçüleri

1. **Sistemdeki Ortalama Müşteri Sayısı**

Sistemde n tane müşteri olması olasılığı $P_n = \rho^n(1-\rho)$ ‘ dur.

P_0: $Sistemde\ hiç\ müşteri\ olmaması\ olasılığı$

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^n\, (1-\rho) = \rho\,(1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^{n-1}$$
$$= \rho\,(1-\rho)\left[\frac{1}{(1-\rho)^2}\right] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Sistemde herhangi bir anda beklenen müşteri sayısı

2. **Kuyrukta bekleyen Ortalama Müşteri Sayısı**

$$E(N_q) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P\big(N_q = n\big)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\, P\,(\,N = n+1) \quad , \qquad P_n = \rho^n(1-\rho)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^{n+1}(1-\rho)$$
$$= (1-\rho)\,\rho^2 \sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^{n-1}$$
$$= (1-\rho)\,\rho^2\left[\frac{1}{(1-\rho)^2}\right] = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Ve ya

$E(N_q) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P(N = n+1)$, $n + 1 = k$ alınırsa $= \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\, P(N = k)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(N = k) - \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k)$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$$

bulunur.

3. Bir Müşterinin Sistemde Bekleme Süresinin Ortalaması

W : Bir müşterinin sistemde bekleme süresi

W_q: Bir müşterinin kuyrukta bekleme süresi

$E(W)'$ bulabilmek için önce W' nin yoğunluk fonksiyonunu bulmalıyız. Çünkü W sürekli bir tesadüfi değişkendir. $f_w(x)$, W' nin yoğunluk fonksiyonu olsun.

$f_w(x\ /\ N = n)$. Sistemde *n* tane müşteri olduğu bilindiğine göre bir müşterinin bekleme süresi;

$$f_w(x\ /\ A) = \frac{f_w(x)}{P(A)}$$

$$W = Y_1' + Y_2 + \ldots + Y_n + Y_{n+1} \sim t_{n+1}$$

t_{n+1} -inci sıçrayış anlarının dağılım fonksiyonu ile W nun dağılım fonksiyonu benzerdir. Burada; $Y_1' + Y_2 + \ldots + Y_{n+1}$ farklıdır, ancak dağılımları aynıdır ve üstel dağılmış tesadüfi değişkenlerdir.

$$f_w(x\ /\ N = n) = f_{t_{n+1}}(x) = \frac{\mu(\mu x)^n}{n!}\, e^{-\mu x}$$

sistemde n tane müşterinin olduğu bilindiğine göre (n+1). müşterinin beklemesinin olasılık fonksiyonu toplam olasılık formülüne göre-

$$f_w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu x)^n . e^{-\mu x}}{n!}\, \rho^n (1-\rho)$$

$$= \mu\, e^{-\mu x}\, (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^n}{n!} \frac{\lambda^n}{\mu^n}$$

$$= \mu\, e^{-\mu x}\, (1-\rho)\ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!}}_{e^{\lambda x}}$$

$$= (\mu - \lambda)\, e^{-(\mu-\lambda)x}$$

$$f_w(x) \begin{cases} (\mu - \lambda) e^{-(\mu-\lambda)x} & , x \geq 0 \\ 0 & ,\ d.d. \end{cases}$$

$$P(W > x) = \int_x^{\infty} f_w(u)du = \int_x^{\infty}(\mu - \lambda)\, e^{-(\mu-\lambda)u}du = e^{-(\mu-\lambda)x}$$

$$E(W) = \int_0^{\infty} P(W > x)dx = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Bir müşterinin sistemde bekleme süresi $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ ise , bir müşterinin kuyrukta ortalama bekleme süresi

$$E(W_q) = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu}$$

İki Paralel Heterojen Kanallı Kuyruk Sisteminin Analiz

Farklı hizmet sürelerine sahip kuyruk sistemlerinde hizmet dağılımını gösteren göstergenin üzerine $\rightarrow$ işareti konulur. Aynı biçimde gelişler arası süreler farklı olduğunda da bu göstergenin üzerine de $\rightarrow$ işareti konulur**.** Bu bağlamda burada verilecek model $M/\vec{M}/2/0$ biçiminde tanımlanıyor.

$\boldsymbol{M/\vec{M}/2/0}$ Sisteminin Tanımı

Bu kuyruk sistemi aşağıdaki gibi analiz ediliyor:

a) Sistemin girişine λ parametreli Poisson akımı geliyor.
b) Her bir müşterinin k. kanalda hizmet süresi μ_k parametreli üstel dağılıma sahiptir.
c) Geliş anında müşteri:
   1. Kanalların her ikisi boş ise α ve $\beta = 1 - \alpha$ olasılığı ile sırayla birinci ve ikinci kanalda hizmet alır.
   2. Yalnız bir kanal boş ise bu kanalda yer alır.
   3. Her iki kanalda dolu ise hizmet almadan sistemden ayrılır.

Denklem Sistemi ve Çözümü

ξ_t ve η_t herhangi bir t- anında sırasıyla birinci ve ikinci kanalların durumlarını göstersin. Bu durumda, $\{(\xi_t, \eta_t), t \geq 0\}$ iki boyutlu sürekli parametreli bir Markov zinciridir. Bu zincirin durum uzayı da aşağıdaki gibidir.

$$E = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}.$$

$$P_{ij}(t) = \text{Prob}\{\, \xi_t = i,\ \eta_t = j\,\},\quad \forall\ (i,j) \in E$$

Burada $P_{ij}(t)$, t süresinde birinci kanalda i ikinci kanalda j tane müşteri olması olasılığıdır. Bu olasılıklar için Kolmogorov diferansiyel denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir. $\{(\xi_t, \eta_t),\ t \geq 0\}$ sürecinin geçiş olasılıkları, $h \longrightarrow 0$, iken $(t, t+h)$ aralığı için bulunacaktır. Şöyle ki,

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in E} P_{ik}(t)\, a_{kj}.$$

$$P'_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu_1 P_{10}(t) + \mu_2 P_{01}(t)$$

$$P'_{10}(t) = -(\lambda+\mu_1) P_{10}(t) + \alpha\lambda P_{00}(t) + \mu_2 P_{11}(t)$$

$$P'_{01}(t) = -(\lambda+\mu_2) P_{10}(t) + \beta\lambda P_{00}(t) + \mu_1 P_{11}(t)$$

$$P'_{11}(t) = -(\mu_1+\mu_2) P_{11}(t) + \lambda(P_{01}(t) + P_{10}(t))$$

Ayrıca $P_{ij}(t)$ limit olasılıklarının aşağıdaki gibi mevcut olduğu varsayılırsa,

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}\,(t) = p_{ij}$$

$$\lim_{t\to\infty} P'_{ij}\,(t) = \sum_{k\in E} \lim_{t\to\infty} P_{ik}(t)\, a_{kj} = \sum_{k\in E} p_{ik}\, a_{kj} = 0.$$

Burada a_{ij} geçiş oranları ve $A = [a_{ij}]$ ile ifade edilir.

$$0 = -\lambda p_{00} + \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01}$$

$$0 = -(\lambda+\mu_1) p_{10} + \alpha\lambda p_{00} + \mu_2 p_{11}$$

$$0 = -(\lambda+\mu_2) p_{10} + \beta\lambda p_{00} + \mu_1 p_{11}$$

$$0 = -(\mu_1+\mu_2) p_{11} + \lambda(p_{01} + p_{10})$$

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & \beta\lambda & \alpha\lambda & - \\ \mu_2 & -(\lambda+\mu_2) & - & \lambda \\ \mu_1 & - & -(\lambda+\mu_1) & \lambda \\ - & \mu_1 & \mu_2 & -(\mu_1+\mu_2) \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklem sisteminde ki ilk üç denklemi Cramer- metodu ile çözelim:

$$\lambda p_{00} = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01}$$

$$\alpha\lambda p_{00} = (\lambda+\mu_1)p_{10} - \mu_2 p_{11}$$

$$\beta\lambda p_{00} = (\lambda+\mu_2)p_{01} - \mu_1 p_{11}$$

Buradan

$$\Delta = \mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1+\mu_2)$$

$$\Delta_{10} = \lambda\mu_2 p_{00}(\lambda + \alpha(\mu_1+\mu_2))$$

$$\Delta_{01} = \lambda\mu_1 p_{00}(\lambda + \beta(\mu_1+\mu_2))$$

$$p_{01} = \frac{\Delta_{01}}{\Delta}$$

$$p_{01} = \frac{(\lambda + \beta(\mu_1+\mu_2))}{\mu_2(2\lambda + \mu_1+\mu_2)}\lambda p_{00}$$

$$p_{10} = \frac{\Delta_{10}}{\Delta}$$

$$p_{10} = \frac{(\lambda + \alpha(\mu_1+\mu_2))}{\mu_1(2\lambda + \mu_1+\mu_2)}\lambda p_{00}$$

bulunur.

$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1, \ \ \forall\, i,j \ \in E$. Başka bir ifade ile $p_k(k = 0,1,2)$ sistemde k tane müşteri olması olasılığı olsun. Bu durumda $p_0 = p_{00}$, $p_1 = p_{01} + p_{10}$, $p_2 = p_{11}$, $\sum_k p_k = 1$ olur.

$$p_1 = \frac{\lambda(\mu_1+\mu_2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1+\mu_2)} p_{00}$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} p_1$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)} p_{00}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1$$

eşitliğinden

$$p_0 = \frac{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2) + (\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \lambda^2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}$$

$$p_1 = \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2) + (\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \lambda^2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2) + (\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \lambda^2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}$$

bulunur. Burada p_0 sistemin boş olması, p_1 kanallardan birisinin boş olması ve p_2'de sisteme gelen müşterinin hizmet almadan ayrılması (kaybolması) olasılığıdır.

Sistemdeki Ortalama Müşteri Sayısı

Sistemdeki müşteri sayısı N ile gösterilirse ortalama müşteri sayısı da $E(N)$ olacaktır.

$$E(N) = \sum_{k=0}^{2} k\, p_k$$

$$= \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1) + 2\lambda^2(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2) + (\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \lambda^2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}$$